

Subloading  $t_{ij}$  model の陰解法計算アルゴリズム

弾塑性 構成モデル 陰解法

地域 地盤 環境 研究所・中部大学 中井 照夫  
Islamic University of Technology Hossain Md. Shahin

これまでに、3次元応力下の粘土から砂までの力学挙動を簡単且つ精巧に表現できる弾塑性構成モデル(Subloading  $t_{ij}$  model)を提案している。このモデルは同じ材料パラメータを用いて、中間主応力の影響はもとより、正規圧密土から過圧密土、自然堆積土までの変形・強度特性を唯一的に記述することが可能である。有限要素解析に適用するに当たり、これまでは構成モデルについては陽的な解析を行ってきたが、精度の向上および計算時間の効率化を目指して return mapping 法による陰的計算アルゴリズムを開発したので報告する。

1. Subloading  $t_{ij}$  model<sup>1)</sup>の特徴とモデルの基本式

Fig.1 は Cam clay type のモデルの初期降伏曲面(破線)と現降伏曲面(実線)および塑性ひずみ増分方向(関連流れ則)を、既往の多くの構成モデルで使われる応力パラメータ  $p$ - $q$  平面で示している。上半分が三軸圧縮、下半分が三軸伸張条件を表す。同図から、 $p > 0$  であっても  $q/p$  が大きい所では引張り応力領域が存在する(引張り応力が発生しないのはグレーのゾーンに限られる)。Fig.2 は Subloading  $t_{ij}$  model の初期および現降伏曲面と塑性ひずみ増分方向を、空間滑動面(SMP)をベースとする修正応力  $t_{ij}$  の応力パラメータ  $t_N$ - $t_S$  平面で示している。 $t_{ij}$  の概念<sup>2)</sup>を使うことにより、中間主応力の影響を自動的に考慮できるとともに、 $t_N > 0$  の領域では引張り応力は発生しない。また、同図に示すように、塑性ひずみ増分を  $t_{ij}$  空間で関連流動則を満足する成分(AF)と  $t_N$  の増減によって生じる等方圧縮成分(IC)に分割することで、ひずみ増分方向の応力経路依存性を表現している。Fig.3 は降伏曲面の  $t_N$  軸上の値  $t_{N1}$  と間隙比  $e$  の関係を描いている。I 点および P 点は初期状態および現状態を表し、密度・拘束応力の影響を表す状態変数として正規圧密線(NCL)との間隙比の差  $\rho$  を、自然堆積土のボンディング効果を表すため仮想上の密度増加を表す状態変数  $\omega$  を導入している。

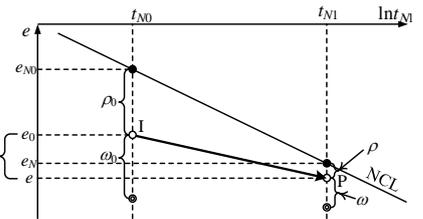
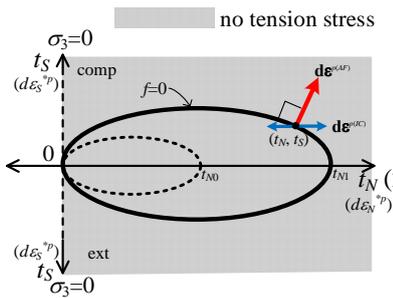
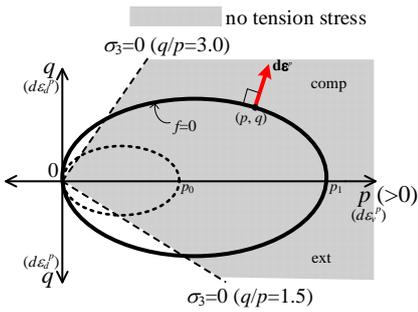


Fig.1 Cam clay type の降伏曲面

Fig.2 Subloading  $t_{ij}$  model の降伏曲面

Fig.3 Subloading  $t_{ij}$  model の  $e$ - $\ln t_{N1}$  関係

これらの特徴を考慮した Subloading  $t_{ij}$  model の基本式は増分形で次式のように表せる。

$$\bullet d\epsilon_{ij}^p = d\gamma \cdot \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} - L^{(IC)} \frac{dt_N}{t_N} \cdot \frac{\partial t_{ij}}{\partial F} + L^{(UC)} \frac{dt_N}{t_N} \cdot \frac{\delta_{ij}}{3} \quad (1)$$

$$\bullet d\epsilon_v^p = d\gamma \frac{\partial F}{\partial t_{kk}} \quad (2)$$

$$\bullet d\rho = -(1+e_0)\sqrt{3} \frac{G+Q}{t_N} d\gamma \quad (3)$$

$$\bullet d\omega = -(1+e_0)\sqrt{3} \frac{Q}{t_N} d\gamma \quad (4)$$

$$\bullet f = F - H - \frac{1}{\lambda - \kappa} (\rho_0 - \rho) = 0 \quad (5)$$

where

$$F = \ln \frac{t_{N1}}{t_{N0}} = \ln \frac{t_N}{t_{N0}} + \zeta(X), \quad \zeta(X) = \frac{1}{\beta} \left( \frac{X}{M^*} \right)^\beta \quad (6)$$

( where  $X = t_s/t_N$  )

$$H = \frac{(-\Delta e)^p}{\lambda - \kappa} = \frac{1+e_0}{\lambda - \kappa} \epsilon_v^p \quad (7)$$

$$L^{(UC)} = \left\langle \frac{\partial F}{\partial t_{kk}} \frac{t_N}{\sqrt{3}} \right\rangle^m \frac{1+e_0}{\lambda - \kappa} \{1 + \langle G + Q \rangle\} \quad (8)$$

$$G = a\rho^b, \quad Q = b\omega^c \quad (9)$$

(1)式において、右辺の第2項と第3項の trace をとると常にゼロとなるので、塑性ひずみ増分  $d\epsilon_{ij}^p$  を(AF)および(IC)成分に分割しているものの、分割しない(すべての塑性ひずみ増分が(AF)成分)場合と塑性体積ひずみ増分  $d\epsilon_v^p$  は変わらない。すなわち、塑性体積ひずみ増分は常に(2)式で計算される。(3)、(4)式および(9)式は  $\rho$  および  $\omega$  の発展測を表すが、 $\rho$  および  $\omega$  は塑性ひずみの発生とともにゼロに近づき、それらの値が大きいほど近づき方は早くなると考えられる。この

ような条件は、 $G$  および  $Q$  を(9)式に示すように、 $G(0)=0$ ,  $Q(0)=0$  を満たす単調増加関数で与えることで表現できる。(5)式は **Figs.2, 3** から判るように降伏関数を表している。

以上の定式化は文献<sup>1)</sup>と基本的に同じであるが、(AF+IC)成分に分割するところをより整合性のあるものにし、return mapping の定式化を容易にするため改良している<sup>3)</sup>。

## 2. Return mapping アルゴリズム

Return mapping の解説本<sup>4)</sup>を参考に上述の Subloading  $t_{ij}$  model の陰的計算アルゴリズムを説明する。既知の現状を  $n$  step,  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$  のひずみ増分を与えたときの未知状態を  $n+1$  step とする。以後、下添字  $n$ ,  $0$  は既知の  $n$  step および初期状態を意味し、上添字の  $e$ ,  $p$  および(trial) は弾性成分、塑性成分および弾性を仮定する試行状態を意味する。なお、 $n+1$  step については添字を省略している。ここに、 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \boldsymbol{\varepsilon}^{e(trial)} - \boldsymbol{\varepsilon}^e$  と表せるので、 $n+1$  step での陰的關係式として以下の式が得られる。なお、ボールド体の記号はベクトルあるいはテンソル成分を意味する。(1)式より

$$\bullet \mathbf{b}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}^e - \boldsymbol{\varepsilon}^{e(trial)} + \Delta\gamma \mathbf{N} - L^{(IC)} \ln \frac{t_N}{t_{N,n}} \frac{\mathbf{N}}{\text{tr}\mathbf{N}} + L^{(IC)} \ln \frac{t_N}{t_{N,n}} \mathbf{N}^{(IC)} = 0 \quad (10)$$

$\rho$  の発展測 (3)式と  $G(\rho)$ が(9)式で与えられることより、

$$\bullet \mathbf{b}_2 = \rho - \rho^{(trial)} - \Delta\gamma \left\{ -(1+e_0)\sqrt{3} \frac{a\rho^p + Q}{t_N} \right\} = 0 \quad (11)$$

(5)式の降伏関数の  $H$  が塑性体積ひずみ(7)式で与えられることより、

$$\bullet \mathbf{b}_3 = \ln \frac{t_N}{t_{N0}} + \zeta(X) - \frac{1+e_0}{\lambda - \kappa} \left\{ \varepsilon_{v,n}^p + \Delta\gamma \text{tr}\mathbf{N} \right\} - \frac{1}{\lambda - \kappa} (\rho_0 - \rho) = 0 \quad (12)$$

なお、ボンディング効果を表す  $Q(\omega)$ 中の  $\omega$  は、(4), (9)式から得られる  $\omega$  と  $\gamma$  に関する微分方程式を解くことにより、以下のように  $t_N$  と  $\Delta\gamma$  の関数として直接的に求められる。

$$\omega = \omega_n \exp\left(-b(1+e_0)\sqrt{3} \frac{1}{t_N} \Delta\gamma\right) \text{ when } l_\omega = 1, \quad \omega = \left(\omega_n^{1-l_\omega} - b(1-l_\omega)(1+e_0)\sqrt{3} \frac{1}{t_N} \Delta\gamma\right)^{\frac{1}{1-l_\omega}} \text{ when } l_\omega \neq 1 \quad (18)$$

(10)~(12)式は  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ ,  $\Delta\gamma$ ,  $\rho$  を未知数とする非線形連立方程式とみなすことができる。すなわち、

$$\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_3)^T, \quad \mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)^T = (\boldsymbol{\varepsilon}^e \quad \Delta\gamma \quad \rho)^T \text{ としたとき、} \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \text{ を Newton 法で解くことになる。}$$

また、試行弾性状態を含め弾性ひずみ  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  から応力を求めるには、弾性ひずみと応力が一意的に決まる弾性式が必要であるが、引張り応力が発生せず地盤材料の非線形弾性挙動を説明できる弾性モデル  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e)$  を使って計算できる。弾性モデルの詳細は文献<sup>5)</sup>を参照のこと。

実際の計算は以下のプロセスで行う。

① 現状の  $n$  step で  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$  のひずみ増分を与えた  $n+1$  step の試行弾性状態 ( $\Delta\gamma=0$ ) を検討する。すなわち、

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{e(trial)} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \rho^{(trial)} = \rho_n, \quad \omega^{(trial)} = \omega_n, \quad \boldsymbol{\sigma}^{(trial)} = \mathbf{E}^e(\boldsymbol{\varepsilon}^{e(trial)}) \text{ として、}$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}^{(trial)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{v,n}^p, \rho_n, \omega_n) = F^{(trial)} - H_n - \frac{1}{\lambda - \kappa} (\rho_0 - \rho_n) \text{ の正負を判別する。}$$

②  $f \leq 0$  であれば  $n+1$  step は弾性状態にあるとして試行弾性で求めた応力が解となる。

③  $f > 0$  のときは弾塑性状態にあるので、上述の非線形連立方程式を解き、弾性ひずみ  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  (応力  $\boldsymbol{\sigma}$ ),  $\Delta\gamma$ ,  $\rho$  を求める。

なお、下負荷面(Subloading)の考え方では除荷時だけが弾性挙動で再載荷時は弾塑性挙動となるので、弾性挙動をしたときも、降伏曲面が現応力を通るように縮小し、密度の影響を表す状態変数  $\rho$  も **Fig. 3** の関係を使って更新する。

以上の陰解法の手続きで任意のひずみ増分を与えたときの応力や状態変数を求めることができるが、有限要素解析に適用するには consistent 接線剛性が必要である。consistent 接線剛性  $\mathbf{D}^{ep}$  は、 $\mathbf{b}(\mathbf{x})=0$  の増分をとるとともに、非線形弾性式  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e)$  の増分形  $d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^e : d\boldsymbol{\varepsilon}^e$  から得られる弾性コンプライアンス  $\mathbf{C}^e = (\mathbf{D}^e)^{-1}$  を利用して、 $\mathbf{D}^{ep} = \partial\boldsymbol{\sigma} / \partial\boldsymbol{\varepsilon}^{e(trial)}$  として求めることができる<sup>4)</sup>。

## 文献

- 1) Nakai *et al.*,(2011): A simple and unified three-dimensional model to describe various characteristics of soils, *Soils and Foundations*, **51**(6), 1149-1168. もしくは Nakai(2012): *Constitutive Modeling of Geomaterials: Principles and Applications*, CRC Press,
- 2) Nakai・Mihara(1984): A new mechanical quantity for soils and its application to elastoplastic constitutive models, *Soils and Foundations*, **24**(2), 82-94.
- 3) 中井・Shahin(2017): 2重硬化(Double Hardening)則を用いない塑性流動方向の応力経路依存性の表現, 第52回地盤工学研究発表会, 307-308. もしくは Nakai・Shahin(2019): A simple method to describe stress path dependency of plastic flow, *Proc. of 16<sup>th</sup> ARCSMGE*, Taipei (to appear)
- 4) 例えば, Souza *et al.*; 寺田他訳,(2008; 2012): *Computational Methods for plasticity; 非線形有限要素法*, John Wiley & Sons; 森北出版
- 5) 中井・Shahin・石川(2018): 引張り応力の発生しない地盤材料の弾性式, 第53回地盤工学研究発表会, 369-370. もしくは Nakai・Shahin・Ishikawa(2019): Rational modeling of elastic behavior in 3D condition, *Proc. of IS-Glasgow*, Glasgow (to appear)